Hasta ahora hemos visto de manera general que

X v.a. con la que describiremos un "fenómeno aleatorio"

$f(x)$ nos da una visión del comportamiento agregado que X puede describir

$F(x)$ nos ayuda a calcular probabilidades

$\mu = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^k)$, $\mathbb{E}((X-\mu)^k)$ medidas resumen que nos dan información acerca del comportamiento de X

$M_X(t)$ nos ayuda a obtener $\mathbb{E}(X^k)$ y en general a caracterizar de manera completa a una v.a.

Ahora veremos varias X que nos sirven para describir muchos fenómenos aleatorios

1 = Variable aleatoria Bernoulli

Tenemos un experimento con 2 posibles resultados, estos resultados son mutuamente excluyentes. Podemos nombrar estos resultados según nos convenga

éxito - fracaso
defectuoso - no defectuoso
pasa - reprueba
a favor - en contra
etc

La probabilidad para el resultado éxito es p y la v.a. $\bar{X}$ asigna 1 si tenemos éxito y 0 fracaso

$$\Omega = \{\text{éxito}, \text{fracaso}\}$$
$$P(\text{éxito}) = p$$
$$P(\text{fracaso}) = 1-p$$

$$(\Omega, P) \xrightarrow{\bar{X}} (V, P_{\bar{X}})$$

$$V = \{0, 1\}, \quad \bar{X}(\text{éxito}) = 1$$
$$\bar{X}(\text{fracaso}) = 0$$

$$f(1) = P_{\bar{X}}(\bar{X} = 1) = p$$
$$f(0) = P_{\bar{X}}(\bar{X} = 0) = 1-p$$

De manera resumida

$$f(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}, \quad x = 0 \text{ ó } 1.$$

Para indicar que una v.a. $\bar{X}$ sigue una distribución Bernoulli con probabilidad de éxito $\underline{\underline{p}}$ usamos la notación

$$\bar{X} \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Características de la v.a. $X \sim$ Bernoulli(p)

1 = Tiene un solo parámetro p, que nos da información acerca de la probabilidad de que ocurra un éxito.

2 = Esperanza

$$\mu = \mathbb{E}(X) = 0\, f(0) + 1\, f(1)$$
$$= p$$

Es importante notar que la v.a. jamás toma el valor de p (a menos que $p=0$ ó 1). Pero nos orienta acerca del valor que tomará con mayor probabilidad la v.a.

3 = Varianza

$$\sigma^2\ Var(X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}((X-\mu)^2) = (0-\mu)^2 f(0) + (1-\mu)^2 f(1)$$
$$= p^2(1-p) + (1-p)^2 p$$

$$= p(1-p)\left[\cancel{p} + 1 - \cancel{p}\right]$$
$$= p(1-p)$$

$$\sigma^2 = p(1-p) \Rightarrow \sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

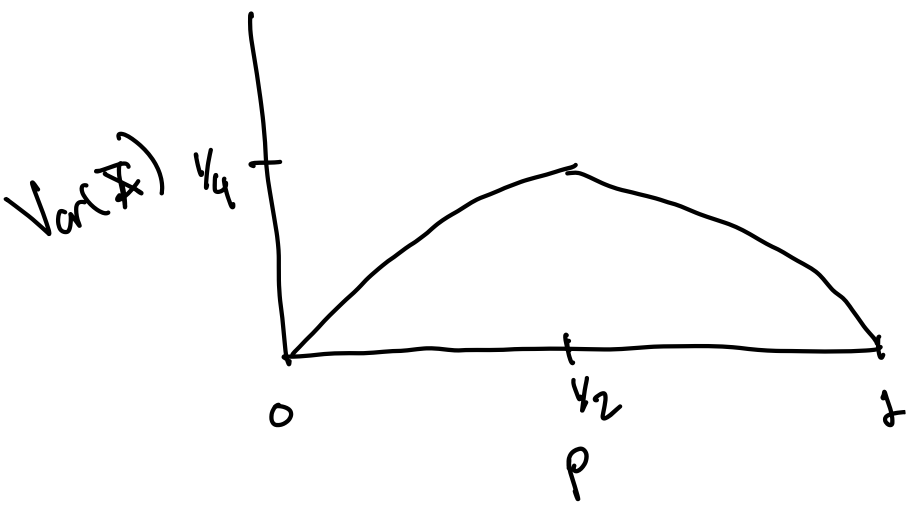
$$g(p) = p(1-p) = p - p^2 \geq 0$$

$g'(p) = 1 - 2p \Rightarrow$ g es creciente en $(0, 1/2)$
es decreciente en $(1/2, 1)$

$g(0) = 0$ y $g(1) = 1$

$$g'(p) = 0 \Rightarrow p = 1/2$$

$g''(p) = -2 \Rightarrow p = 1/2$ es el maximo



la v.a. alcanza su varianza maxima en $p = 1/2$,
es la maxima incertidumbre

4.- Función generadora de momentos

$$M_x(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$$

$$= e^{0t} f(0) + e^{1t} f(1)$$

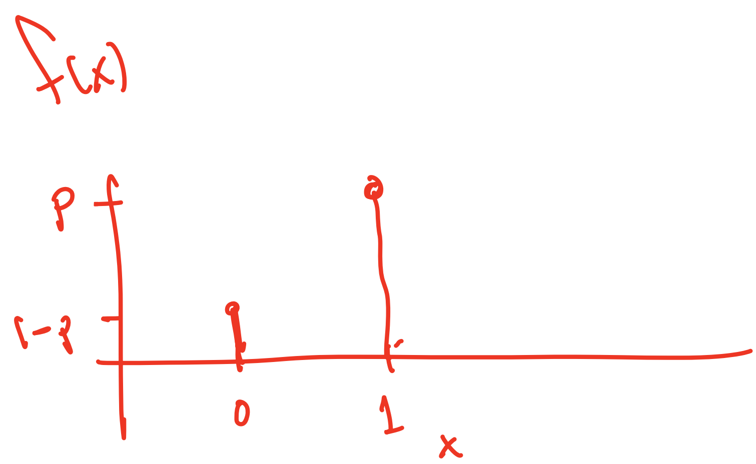
$$= 1-p+pe^t$$

$$M_X(t) = 1-p+pe^t$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{d}{dt} M_X(t) = pe^t \Big|_{t=0} = p$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = pe^t \Big|_{t} = p$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) = p$$



$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x)$$

---

2. Variable aleatoria Binomial

El tipo de fenómenos aleatorios subyacente y que da origen a esta v.a. es el siguiente

1: Cada experimento de una binomial involucra la realización de $\underline{n}$ experimentos Bernoulli independientes entre sí y todos con la misma probabilidad de éxito.

2: La probabilidad de éxito en cada experimento Bernoulli es p

3: La v.a. binomial cuenta el número de éxitos en los $\underline{n}$ experimentos Bernoulli

Denotaremos a una v.a binomial en donde se realizan $\underline{n}$ experimentos Bernoulli todos con la misma probabilidad $\underline{p}$ como

$$X \sim Bin(n, p)$$

probabilidad de éxito común en los $\underline{n}$ experimentos Bernoulli realizados

número de experimentos Bernoulli

¿Qué tipo de problemas podemos intentar describir con esta v.a.?

- Número de ventas en una tienda, un sitio web etc. tienes $\underline{n}$ clientes que entran a una tienda, cada uno compra o no compra. La probabilidad de que compre es $\underline{p}$

- Número de click en cierta imagen o publicidad
- Número de personas que dan positivo a una cierta enfermedad.
- Número de personas que votaron por un cierto candidato en las elecciones.

- Número de artículos defectuosos.

Básicamente conteos, pero no siempre funciona bien.

Cómo obtener la función de distribución de probabilidades de una v.a. Binomial

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \quad i=1,\dots,n \text{ en donde } X_i \perp X_j$$

$$\Rightarrow \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Rightarrow \quad X \in \{0,1,2,\dots,n\}$$

$$f(0) = P_X(X = 0) = P((0,0,0,\dots,0)) \quad \text{independencia}$$

$$= P(\{0\})\,P(\{0\})\cdots P(\{0\})$$

$$= \binom{n}{0}(1-p)^n$$

$$f(1) = P_X(X = 1) = P((1,0,0,\dots,0)) + P((0,1,\dots,0)) + \dots + P((0,0,\dots,1)) =$$

$$= \underbrace{n}_{\binom{n}{1}}\, p(1-p)^{n-1}$$

$$f(2) = P_X(X = 2) = P((1,1,0,0\dots)) + P((1,0,1,\dots 0)) + \dots + P((0,0,\dots 1,1))$$

$$= c\, p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$= \binom{n}{2}$$

De manera general si $X \sim Bin(n,p)$, entonces su función de distribución de probabilidad está dada por

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

¿Es una función de distribución?

Claramente $f(x) \geq 0$

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (1-p+p)^n = 1 \perp$$

Teorema del Binomio

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} b^x a^{n-x}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 1-p \\ b &= p \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Función generadora de momentos

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt}) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{xt} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= (pe^t + 1-p)^n$$

Si $X \sim Bin(n,p)$,

$$\Rightarrow M_X(t) = (pe^t + 1-p)^n$$

$$\mathbb{E}(X) = \left.\frac{d}{dt} M_X(t)\right|_{t=0} = \left. npe^t (pe^t + 1-p)^{n-1} \right|_{t=0}$$

$$= np \perp$$

$$\underline{\mathbb{E}(X) = np}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0}$$

$$= npe^t (pe^t + 1 - p)^{n-1}$$

$$+ npe^t (n-1) pe^t (pe^t + 1 - p)^{n-2} \Big|_{t=0}$$

$$= np + np(n-1)p$$

$$= np + n(n-1)p^2$$

$$= np + n^2p^2 - np^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p) \quad \text{∤}$$

Resumiendo

Si $X \sim Bin(n,p)$

$\rightarrow$ X puede modelar conteos, $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$$

$$\mathbb{E}(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$$

Obuamenk

$$\underline{Bin(1, p) \equiv Bernolli(p)}$$